# Clase 14: Teorema de Green

C.J. Vanegas

10 de junio de 2008

Relaciona una integral de linea a lo largo de una curva cerrada $c$ en el plano $\mathbb{R}^2$ con una intgral doble en la región encerrada por $C$.
En Matemáticas 6 se extenderá este resultado a curvas y superficioes en $\mathbb{R}^3$.
Las integrales de linea se tormarán a lo largo de curvas que forman la frontera de regiones elementales.
Una curva cerrada simple (que no se corta a si misma) $C$ que es la frontera de una región elemental tiene dos orientaciones:

1. Contraria a las ajugas de reloj que se tornará como positiva. Denotaremos a $C$ con esta orientación :$C^+$.

2. Correspondiente a las agujas del reloj que se tomará como negativa. denotaremos a $C$ con esta orientación :$C^-$.

Para una region de tipo $I$, la frontera $C$ se puede descomponer en sus partes: inferior y superior y quizás segmentos verticales a izquierda y derecha.
Por ejemplo:
Superíndice + significa de abajo a arriba o de izquierda a derecha. Superíndice $-$ significa de arriba a abajo y derecha a izquierda. $C = C_1^+ + B_1^+ + C_2^- + B_2^-$, donde $C_1^+, B_1^+, C_2^-, B_2^-$ son las componentes de $C$ o $C = C_1^+ + C_2^-$
Para una región de tipo $II$, podemos descomponer a su frontera en partes: izquierda y derecha y quizás segmentos horizontales superior e inferior.
Por ejemplo:
$C = C_1^+ + B_1^+ + C_2^- + B_2^-$ o $C = C_1^+ + C_2^-$
Similarmente si tenemos una región elemental de tipo $III$ podemos descomponer su frontera de dos maneras: una en mitad superior e inferior y otra en mitad izquierda y derecha.

# 1. Teorema de Green

**Teorema 1.** *Sea $D$ una región elemental de tipo $III$ y sea $C$ su frontera. suponga que $P, Q : D \to \mathbb{R}$ son de clase $c^1$, entonces:*

$$\boxed{\int_{c^+} Pdx + Qdy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy}$$

*Se puede recordar la orientación positiva para $C$, si al caminar a lo largo de $C$ la región $D$ está siempre a la izquierda.*

*Demostración :* $i$ Si $D$ es una región de tipo $I$ y $C$ su frontera y si suponemos que $P : D \to \mathbb{R}$ es de clase $c^1$, entonces $\displaystyle\int_{c^+} Pdx = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\, dxdy.$

$ii$ Si $D$ es una región de tipo $II$ y $c = \partial D$ y si suponemos que $Q : D \to \mathbb{R}$ es de clase $c^1$, entonces $\displaystyle\int_{c^+} Qdy = -\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\, dxdy.$

$iii$ Sumar los resultados de los dos apartados anteriores $i$ y $ii$.

$i$ $D : a \leqslant x \leqslant b, \quad \phi_1(x) \leqslant y \leqslant \phi_2(x)$ $C = \partial D = C_1^+ + B_1^+ + C_2^- + B_2^-$.

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\, dxdy = \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \frac{\partial x}{\partial y}\, dydx = \int_a^b (P(x, \phi_2(x)) - P(x, \phi_1(x)))\, dx =$$

$$\int_a^b (P(x, \phi_2(x))\, dx - \int_a^b (P(x, \phi_1(x))\, dx = \int_{c_2^+} P(x,y)\, dx - \int_{c_1^+} P(x,y)\, dx =$$

$$-\int_{c_2^-} P(x,y)\, dx - \int_{c_1^+} P(x,y)\, dx$$

Por lo tanto $\displaystyle\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\, dxdy = -\left[ \int_{c_2^-} P(x,y)\, dx + \int_{c_1^+} P(x,y)\, dx \right].$

Por otro lado, como $\displaystyle\int_{B_1^+} P(x,y)dx = \int_b^b Pdx = 0$ y $\displaystyle\int_{B_2^-} P(x,y)dx = \int_a^a Pdx = 0,$

entonces: $\displaystyle\int_{C^+} P(x,y)dx = \int_{C_1^+} Pdx + \int_{B_1^+} Pdx + \int_{C_2^-} Pdx + \int_{B_2^-} Pdx = \int_{c_1^+} Pdx + \int_{c_2^-} Pdx$

se obtiene: $\displaystyle\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\, dxdy = -\int_{C^+} P(x,y)\, dx \Rightarrow \int_{C^+} P(x,y)\, dx = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\, dxdy.$

$ii$ Similarmente a $i$. □

**Observación 1.** *El teorema de Green también es válido en regiones que no son de tipo $III$ pero pueden descomponerse en varios trozos cada uno de los cuales resulta una región de tipo $III$. Se aplica el teorema a cada uno de los trozos y se suman los resultados.*

**Ejemplo 1.** *Evaluar* $\int_C (x^2-y^2)dx+(2y-x)dy$, *en donde* $C$ *consiste en la frontera de la región del primer cuadrante que está limitada por las gráficas de* $y=x^2, \quad y=x^3$.

**Solución 1.** $\left.\begin{array}{r} P(x,y)=x^2-y^2 \\ Q(x,y)=2y-x \end{array}\right\}$ $c^1$ *en la región* $D$.
$D$ *región tipo* $III$.
*Por el teorema de Green:*

$$\int_C (x^2-y^2)dx+(2y-x)dy=\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dA=\int_0^1\int_{x^3}^{x^2}(-1-(-2y))\,dydx=$$
$$\int_0^1 -y+y^2|_{x^3}^{x^2}\,dx=\int_0^1(-x^2+x^4+x^3-x^6)\,dx=-\frac{x^2}{2}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^4}{4}-\frac{x^7}{7}\,|_0^1=-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{4}-\frac{1}{7}=\frac{1}{5}-\frac{11}{28}$$

**Ejemplo 2.** *Evaluar* $\int_C (x^5-3y)dx+(2x-e^{y^3})dy$, *en donde* $C$ *es la frontera de la región* $(x-1)^2+(y-5)^2=4$

**Solución 2.** $\left.\begin{array}{r} P(x,y)=x^5-3y \\ Q(x,y)=2x-e^{y^3} \end{array}\right\}$ $c^1$ *en la región* $D((1,5),2)$.
$D$ *región tipo* $III$.
*Por el teorema de Green:* $\int_C (x^5-3y)dx+(2x-e^{y^3})dy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dA=\iint_D(2-3)\,dA=-\iint_D dA=-4\pi$

**Ejemplo 3.** *Sea* $\int_C \frac{x}{x^2+y^2}\,dx+\frac{y}{x^2+y^2}\,dy$, *donde* $C$ *es:*
$C=C_1+\cdots C_4$ *¿ puede aplicarse el teorema de Green ?*

**Solución 3.** *No, pues*
$$\left.\begin{array}{r} P(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2} \\ Q(x,y)=\dfrac{y}{x^2+y^2} \end{array}\right\} \textit{no son continuas en } (0,0)$$

# 2. Area de una región

Si $C$ es una curva cerrada simple que acota una región en la cual se puede aplicar el teorema de Green, entonces:

$$\boxed{A(D)=\frac{1}{2}\int_{\partial D=C} xdy-ydx}$$

*Demostración :* Por el teorema de Green: $\int_{\partial D} Pdx + Qdy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$ tome $P = -y$ y $Q = x$, entonces $\int_{\partial D} -ydx + xdy = \iint_D (1 - (-1))dxdy = \iint_D 2dxdy = 2 \iint_D dxdy = 2A(D) \Rightarrow A(D) = \frac{1}{2} \int_{\partial D} xdy - ydx.$ $\square$

**Ejemplo 4.** *Calcular el área encerrada por la elipse* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

**Solución 4.** $A(D) = \frac{1}{2} \int_{\partial D} xdy - ydx$ *Usando la paramerización* $x = x$ $y = \sqrt{b^2 - \frac{x^2 b^2}{a^2}} = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ *con* $-a \leqslant x \leqslant a$ $dx = dx$, $dy = \frac{b}{a} \frac{-2xdx}{2\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{b}{a} \frac{xdx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ $A(D) = -2\frac{1}{2} \int_{-a}^{a} \Big( -\frac{b}{a} \frac{x^2 dx}{2\sqrt{a^2 - x^2}}$ $\frac{b}{a} \int_{-a}^{a} \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$ *haciendo el siguiente cambio* $x = a \sin\theta$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$, $dx = a\cos\theta \, d\theta$.
*Así* $A(D) = ba\pi \int_{\pi}^{\pi} \frac{a\cos\theta}{a\cos\theta} d\theta = ba\pi$

# 3. Forma vectorial del teorema de Green

<u>Recordamos</u> Si $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$ y $\overrightarrow{w} = (w_1, w_2, w_3)$ con $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^3$ entonces

$$\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} = \text{vector} \perp \text{a } \overrightarrow{v} \text{ y a } \overrightarrow{w}.$$

Si $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ estan en $\mathbb{R}^2$ entonces

$$\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ v_1 & v_2 & 0 \\ w_1 & w_2 & 0 \end{pmatrix} = (0, 0, v_1 w_2 - v_2 w_1).$$

Si tomamos $\overrightarrow{v} = \bigtriangledown = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, 0)$ y $\overrightarrow{w} = F = (P, Q, 0)$, entonces

$$\bigtriangledown \times F = \begin{pmatrix} i & j & k \\ v_1 & v_2 & 0 \\ w_1 & w_2 & 0 \end{pmatrix} = (0, 0, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}).$$

y si hacemos $(\bigtriangledown \times F) \cdot \widehat{k}$ donde $\widehat{k} = (0, 0, 1)$, obtenemos:

$$\boxed{(\bigtriangledown \times F) \cdot \overrightarrow{k} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}.$$

Por otro lado: $\int_{\partial D} F \cdot ds = \int_{\partial D} (F_1 \frac{dx}{dt} + F_2 \frac{dy}{dt})\, dt = \int_{\partial D} Pdx + Qdy.$

Luego podemos reescribir el teorema de Green en la forma:

$$\boxed{\int_{\partial D} F \cdot ds = \iint_D (\bigtriangledown \times F) \cdot \widehat{k} dA.}$$

Vemos que:

$$\int_{\partial D} F \cdot ds = \int_{\partial D} P dx + Q dy$$

$$\iint_D (\bigtriangledown \times F) \cdot \widehat{k} dA = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$